

PEMBANGKITAN POLA SIMETRI $p3$ DARI SIMULASI SISTEM DINAMIK

SYUKRI HAMDI, MAHDHIVAN SYAFWAN*, NARWEN

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : mahdhivan@sci.unand.ac.id*

Diterima Direvisi Dipublikasikan

Abstrak. Pola simetri $p3$ memiliki simetri translasi pada sumbu- x dan sumbu- y , serta simetri rotasi sebesar 120° . Dalam makalah ini akan dibahas pembangkitan pola simetri $p3$ menggunakan aplikasi MatLab melalui simulasi sistem dinamik. Pertama-tama, dilakukan analisis untuk menentukan fungsi dinamik yang memenuhi sifat-sifat pola simetri $p3$. Kemudian, pada proses pembangkitannya di MatLab, setiap titik pada bidang digunakan sebagai titik awal iterasi sistem dinamik, dan warna pada titik tersebut ditentukan berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan melalui tiga kriteria konvergensi, yaitu Tes Euclidean, Tes Jarak Fraksional, dan Tes Jarak Maksimum. Dengan mensimulasikan beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi-fungsi dinamik dan menggunakan ketiga kriteria konvergensi, diperoleh berbagai pola simetri $p3$ yang lebih bervariasi.

Kata Kunci: Sistem dinamik, pola simetri $p3$, kriteria konvergensi.

Abstract. The $p3$ symmetrical pattern is a symmetrical pattern that has translational symmetry along the x -axis and y -axis, as well as rotational symmetry of 120° . In this paper, we discuss the generation of $p3$ symmetrical pattern using the MatLab application from dynamical system simulations. First, we analyze the choice of dynamical functions that have properties of the $p3$ symmetrical pattern. Furthermore, in the process of generating it in MatLab, each point on a plane is used as the initial point in the iteration of the dynamical system. Then, the color assigned to that point is determined from the iteration number generated through three convergence tests: Euclidean Test, Fractional Distance Test, and Maximum Distance with Weight Test. Based on the simulation of several combinations of parameter values in the dynamical functions and by using all three convergence criteria, we obtain more varied $p3$ symmetrical patterns.

Kata Kunci: Keywords : Dynamical system, $p3$ symmetrical pattern, convergence criterion.

1. Pendahuluan

Dewasa ini pola-pola geometri banyak berkembang. Aplikasinya dapat ditemukan antara lain pada desain keramik, batik, dan hiasan dinding (*wallpaper*). Ke-

*penulis korespondensi

banyak orang dalam membuat pola-pola geometri masih dilakukan secara manual. Seiring berjalannya waktu melalui teknologi komputer, pola-pola geometri dapat dibangkitkan menjadi pola yang lebih artistik dan beragam.

Pendekatan matematis melalui simulasi sistem dinamik merupakan salah satu cara untuk membangkitkan pola-pola geometri baru [5]. Sistem dinamik adalah model matematika yang berisi aturan yang menjelaskan cara sejumlah kuantitas mengalami perubahan seiring waktu. Chung dan Chan pada tahun 1993 berhasil membangkitkan pola-pola simetri dari simulasi sistem dinamik. Pola-polanya dicirikan oleh fungsi-fungsi dinamik dengan syarat-syarat tertentu [4]. Kemudian Gdawiec tahun 2017 dengan menggunakan iterasi konvergensi yang berbeda, berhasil mengembangkan penelitian Chung dan Chan, sehingga mendapatkan pola yang lebih menarik dan variatif [2].

Berdasarkan [6], terdapat 17 macam pola simetri dengan nama sebagai berikut: $p1$, $p2$, pm , pg , $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$, cm , $c2mm$, $p3$, $p3m1$, $p31m$, $p4$, $p4mm$, $p4gm$, $p6$, dan $p6mm$. Setiap pola memiliki kombinasi dari simetri translasi, refleksi, rotasi, dan refleksi geser.

Secara khusus dalam penelitian ini pola simetri yang dibangkitkan adalah jenis $p3$, yaitu pola yang memiliki simetri rotasi 120° dan simetri translasi [4]. Pola simetri $p3$ ini akan dibangkitkan dari simulasi sistem dinamik diskrit berikut,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + g(x_n, y_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

untuk suatu fungsi f dan g dengan syarat-syarat yang akan ditentukan.

Pembangkitan pola simetri $p3$ dalam penelitian ini menggunakan beberapa jenis tes konvergensi, yaitu Tes Euclidean [4], Tes Jarak Fraksional (*Fractional Distance Test*) [2], dan Tes Jarak Maksimum Berbobot (*Maximum Distance With Weight Test*) [2].

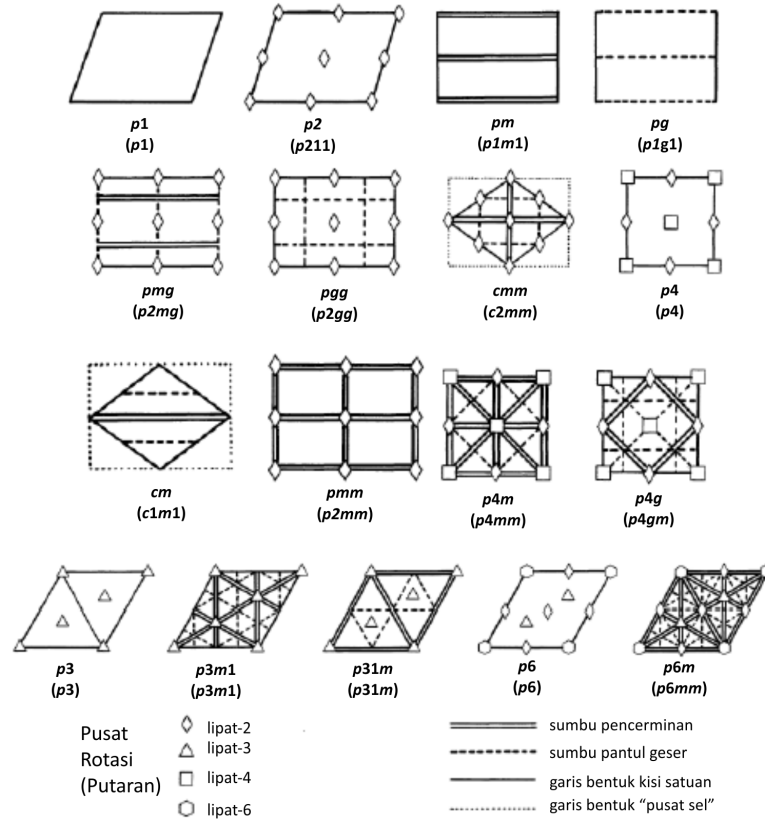
Penelitian ini merujuk pada referensi [4], namun dengan pembahasan yang lebih detail pada syarat dan pemilihan fungsi dinamik yang memenuhi sifat pola simetri $p3$. Penentuan syarat dan pemilihan fungsi dinamik untuk pola-pola simetri juga sudah dikaji oleh Putri, Viera, Cania, Prabowo, dan Putra yang masing-masing membahas pola simetri $p6mm$ [7], $p2mm$ [8], $p4$ [9], $p2$ [10], dan $p3m1$ [11].

2. Landasan Teori

2.1. Pola Simetri

Poligon atau segi banyak terkecil yang memenuhi bidang (tidak berlubang) disebut kisi satuan (*lattice*). Suatu kisi satuan dapat menyimpan lebih dari satu pusat rotasi lipat- k . Sebuah kisi satuan dikatakan memiliki orde k jika mempunyai pusat rotasi lipat- k yang tertinggi [1]. Masing-masing jenis kisi satuan bisa membuat suatu pola dengan melakukan satu atau lebih isometri terhadap kisi satuan tersebut. Pola ini dikenal dengan istilah pola simetri. Menurut [3], ada 17 tipe pola simetri yang dapat dilihat pada Gambar 2.3.5.

Dalam klasifikasi beberapa tipe pola simetri tersebut, digunakan notasi-notasi berikut [3]:

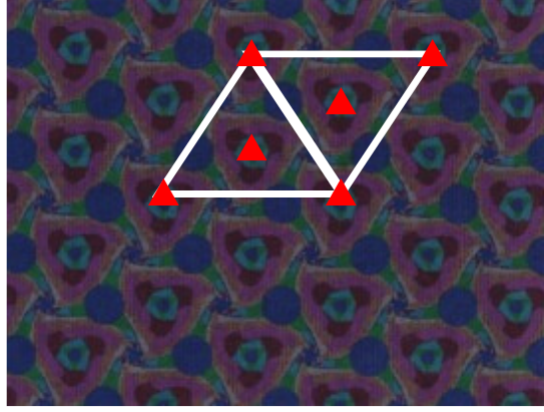


Gambar 1. Tipe-tipe Pola Simetri.

- (1) Huruf p dan c masing-masing menyatakan sel primitif (kisi satuan) dan sel terpusat. Sel primitif mempunyai pusat dengan orde rotasi tertinggi berada pada titik kisi, sedangkan sel terpusat mempunyai sumbu refleksi yang tegak lurus dengan satu atau dua sisi sel.
- (2) Huruf m (*mirror*) menyatakan sumbu refleksi dan g menyatakan bahwa tidak ada refleksi melainkan refleksi geser.
- (3) Nilai n menyatakan sudut rotasi terhadap sumbu- x yang bergantung pada n (orde rotasi), yaitu $\alpha = 180^\circ$ untuk $n = 1$ atau $n = 2$, $\alpha = 45^\circ$ untuk $n = 4$, $\alpha = 60^\circ$ untuk $n = 3$ atau $n = 6$.

2.2. Pola Simetri $p3$

Menurut definisi, pola simetri $p3$ merupakan pola berulang tiga dimensi yang memiliki simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dan simetri rotasi sebesar 120° . Pola ini tidak mempunyai simetri refleksi dan simetri refleksi geser. Pola ini mempunyai kisi satuan berbentuk segitiga dengan pusat rotasi lipat-3. Salah satu bentuk yang memiliki pola simetri $p3$ yang diambil dari penelitian Chung [4], seperti terlihat pada Gambar 2.

Gambar 2. Contoh gambar pola simetri $p3$.

3. Pembahasan

3.1. Syarat dan Pemilihan Fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$

3.1.1. Syarat Pada Isometri

1. Simetri Translasi

Misalkan sistem persamaan (1.1) memiliki simetri translasi dengan periode T sepanjang sumbu- x artinya, jika dilakukan transformasi terhadap $x' = x - T$ dan $y' = y$. maka sistem persamaan tidak akan berubah. Kemudian x' dan y' disubstitusikan ke dalam sistem persamaan (1.1) diperoleh,

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n + T, y'_n), \\ y'_{n+1} = y'_n + g(x'_n + T, y'_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Agar sistem persamaan (1.1) dan (3.1) identik, maka

$$\begin{cases} f(x + T, y) = f(x, y), \\ g(x + T, y) = g(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Berikutnya jika sistem persamaan (1.1) mempunyai simetri translasi dengan periode T^* di sepanjang sumbu- y , yaitu $x' = x$ dan $y' = y - T^*$, sehingga diperoleh

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n, y'_n + T^*), \\ y'_{n+1} = y'_n + g(x'_n, y'_n + T^*). \end{cases} \quad (3.3)$$

Agar sistem persamaan (1.1) dan (3.3) identik, maka

$$\begin{cases} f(x, y + T^*) = f(x, y), \\ g(x, y + T^*) = g(x, y). \end{cases} \quad (3.4)$$

Berikutnya jika sistem persamaan (1.1) memiliki simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode masing-masing T dan T^* , maka sistem

persamaan (3.2) dan (3.4) berlaku sekaligus, yaitu

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T^*), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + T^*). \end{cases} \quad (3.5)$$

2. Simetri Rotasi

Misalkan sistem persamaan (1.1) tidak mengalami perubahan jika dilakukan rotasi sebesar θ yang berlawanan arah jarum jam. Dalam hal ini transformasi yang berlaku sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

dengan

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

dengan $\det(T_\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, sehingga T_θ dapat diinverskan. Akibatnya berlaku

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (3.7) ke persamaan (1.1) diperoleh,

$$T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = T_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Kalikan kedua ruas dengan T_θ didapatkan,

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + T_\theta \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Agar sistem persamaan (1.1) dan (3.8) identik, maka haruslah

$$f(x', y') = \cos \theta f(x, y) - \sin \theta g(x, y), \quad (3.9)$$

$$g(x', y') = \sin \theta f(x, y) + \cos \theta g(x, y). \quad (3.10)$$

3.1.2. Pemilihan Fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$

Pola Simetri p3 mempunyai simetri rotasi $\theta = 120^\circ$. Kemudian, $\theta = 120^\circ$ disubstitusikan, sehingga diperoleh,

$$f(x'', y'') + f(x', y') + f(x, y) = 0. \quad (3.11)$$

Solusi dari persamaan (3.11) dapat diperoleh dengan menyatakan $f(x, y)$ sebagai kombinasi linear dari $h(x, y)$, $h(x', y')$, dan $h(x'', y'')$, dengan h adalah fungsi sebarang. Dalam hal ini dapat ditulis sebagai berikut,

$$f(x, y) = rh(x, y) + sh(x', y') + th(x'', y''), \quad (3.12)$$

dengan r, s dan t adalah bilangan riil. berdasarkan persamaan (3.11) berlaku,

$$t = -r - s. \quad (3.13)$$

Oleh karena itu,

$$f(x, y) = rh(x, y) + sh(x', y') + (-r - s)h(x'', y''). \quad (3.14)$$

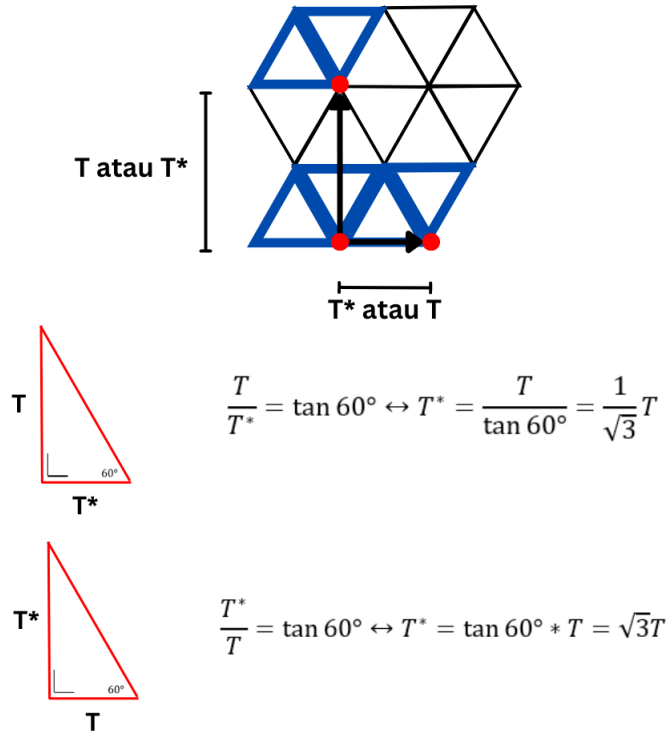
Maka didapatkan,

$$g(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(x, y) - \frac{2}{\sqrt{3}}f(x', y'). \quad (3.15)$$

Misalkan apabila sistem persamaan mempunyai simetri translasi sepanjang sumbu- x sama dengan periode T dan translasi sepanjang sumbu- y dengan periode $T^* = \alpha T$, sehingga diperoleh,

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + \alpha T), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + \alpha T), \end{cases}$$

dengan $\alpha = \sqrt{3}$ atau $\alpha = 1/\sqrt{3}$. Proses translasi pada pola simetri $p3$ tersebut diilustrasikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Ilustrasi translasi pada pola simetri $p3$

Kemudian akan ditentukan fungsi $h(x, y)$ adalah fungsi periodik sepanjang sumbu- x dengan periode 2π dan sumbu- y dengan periode $2\pi/\sqrt{3}$. Maka $h(x, y)$

dapat ditulis dalam deret Fourier ganda berikut:

$$\begin{aligned}
h(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn} \cos(mx) \cos(ny\sqrt{3}) \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{mn} \cos(mx) \sin(ny\sqrt{3}) \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{mn} \sin(mx) \cos(ny\sqrt{3}) \right) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_{mn} \sin(mx) \sin(ny\sqrt{3}) \right), \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.16) dianalisis, Sehingga fungsi $h(x, y)$ dapat ditulis,

$$\begin{aligned}
h(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn} \cos(mx) \cos(ny\sqrt{3}) \right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{mn} \cos(mx) \sin(ny\sqrt{3}) \right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{mn} \sin(mx) \cos(ny\sqrt{3}) \right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_{mn} \sin(mx) \sin(ny\sqrt{3}) \right). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

3.2. Pembangkitan Pola Simetri p3

Setelah fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ ditentukan, maka pada subbab ini akan dilakukan simulasi untuk membangkitkan pola simetri p3. Pola simetri ini akan dibangkitkan menggunakan aplikasi Matlab. Kemudian akan dilakukan pewarnaan titik (*pixel*) yang ditentukan dengan cara berikut [4]:

1. Setiap titik (x, y) pada suatu bidang $D \subset \mathbb{R}^2$ dijadikan sebagai titik awal (x_0, y_0) , sehingga diperoleh barisan titik $\{(x_n, y_n)\}$.
2. Jalankan proses iterasi sepanjang:
 - (i) Memenuhi suatu tes konvergensi dengan toleransi galat ϵ (jika iterasi konvergen), atau
 - (ii) telah mencapai jumlah maksimum iterasi, misalkan K (jika iterasi tidak konvergen).

Pada penelitian ini digunakan tiga jenis tes konvergensi, yaitu:

- a. Tes Euclidean [4]

$$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} < \epsilon, \quad n \geq 0,$$

- b. Tes Jarak Fraksional (*Fractional Distance Test*) [2]

$$(|x_{n+1} - x_n|^q + |y_{n+1} - y_n|^q)^{\frac{1}{q}} < \epsilon, \quad n \geq 0, \quad q \geq 0,$$

- c. Tes Jarak Maksimum Berbobot (*Maximum Distance With Weight Test*) [2]

$$\max\{a|x_{n+1} - x_n|, b|y_{n+1} - y_n|\} < \epsilon, \quad n \geq 0, \quad a, b \geq 0.$$

3. Setelah proses iterasi berakhir, tetapkan warna pada titik (x, y) berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan. Jenis warna tergantung *colourmap* yang dipilih pada Matlab.

Pada simulasi pembangkitan pola simetri $p3$ ini, ditetapkan $D = [-20, 20]^2$ dengan tingkat resolusi $nx = 1500$ dan $ny = 1500$, $\epsilon = 0.1$ dan $K = 50$. Pemilihan K dan ϵ tersebut mengikuti referensi [5]. *Colormap* yang digunakan dalam pembangkitan pola simetri $p3$ adalah tipe *jet* karena gambar yang dihasilkan kaya warna dan menarik. Selanjutnya dilakukan tiga kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi $h(x, y)$, $f(x, y)$, dan $g(x, y)$ untuk memperoleh pola-pola simetri $p3$ yang berbeda, yaitu:

1. Nilai parameter $r = 0, 1$, $s = 0, 1$, $A_{11}=1$, $C_{11}=0$, dan $A_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk suatu $m \neq 1$ dan $n \neq 1$. Fungsi yang digunakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \cos(x) \cos(\sqrt{3}y) + \cos(x) \sin(\sqrt{3}y) \\ &\quad + \sin(x) \cos(\sqrt{3}y) + \sin(x) \sin(\sqrt{3}y), \\ f(x, y) &= 0, 1 * h(x, y) + 0, 1 * h(x', y'), \\ &\quad + (-0, 1 - 0, 1) * h(x'', y''), \\ f(x', y') &= 0, 1 * h(x', y') + (0, 1) * h(x'', y'') \\ &\quad + (-0, 1 - 0, 1) * h(x, y), \text{ dan} \\ g(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}f(x, y) - \frac{2}{\sqrt{3}}f(x', y'). \end{aligned} \quad (3.18)$$

2. Nilai parameter $r = 0, 1$, $s = 0, 1$, $A_{12}=1$, $C_{12}=0$, dan $A_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk suatu $m \neq 1$ dan $n \neq 2$. Fungsi yang digunakan sebagai berikut,

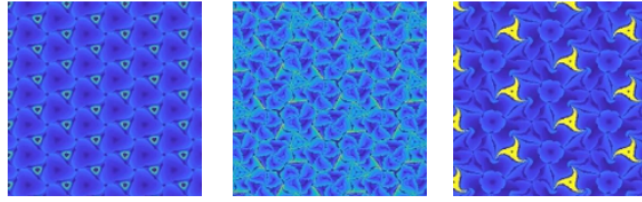
$$\begin{aligned} h(x, y) &= \cos(x) \cos(2\sqrt{3}y) + \cos(x) \sin(2\sqrt{3}y) \\ &\quad + \sin(x) \cos(2\sqrt{3}y) + \sin(x) \sin(2\sqrt{3}y), \\ f(x, y) &= 0, 1 * h(x, y) + 0, 1 * h(x', y') \\ &\quad + (-0, 1 - 0, 1) * h(x'', y''), \\ f(x', y') &= 0, 1 * h(x', y') + (0, 1) * h(x'', y'') \\ &\quad + (-0, 1 - 0, 1) * h(x, y), \text{ dan} \\ g(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}f(x, y) - \frac{2}{\sqrt{3}}f(x', y'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

3. Nilai parameter $r = 0, 1$, $s = 0, 1$, $A_{21}=1$, $C_{21}=0$, dan $A_{mn} = C_{mn} = 0$ untuk

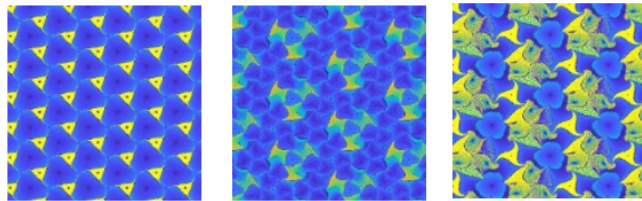
suatu $m \neq 2$ dan $n \neq 1$. Fungsi yang digunakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= \cos(2x) \cos(\sqrt{3}y) + \cos(2x) \sin(\sqrt{3}y) \\
 &\quad + \sin(2x) \cos(\sqrt{3}y) + \sin(2x) \sin(\sqrt{3}y), \\
 f(x, y) &= 0,1 * h(x, y) + 0,1 * h(x', y') \\
 &\quad + (-0,1 - 0,1) * h(x'', y''), \\
 f(x', y') &= 0,1 * h(x', y') + (0,1) * h(x'', y'') \\
 &\quad + (-0,1 - 0,1) * h(x, y), \text{ dan} \\
 g(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}f(x, y) - \frac{2}{\sqrt{3}}f(x', y').
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

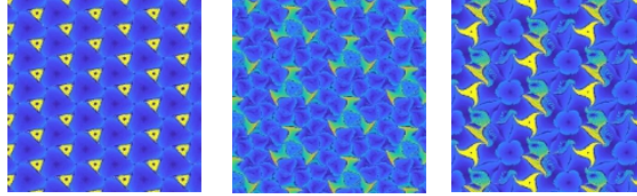
Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ pada aplikasi Matlab berdasarkan tiga kombinasi di atas disajikan pada sistem persamaan (3.18), (3.19) dan (3.20). Hasil *running* program tersebut akan menghasilkan Gambar 4-5. Dari analisis yang dilakukan terhadap pola pada masing-masing gambar, diperoleh bahwa pola yang dihasilkan konsisten dengan sifat-sifat yang berlaku pada pola simetri $p3$.



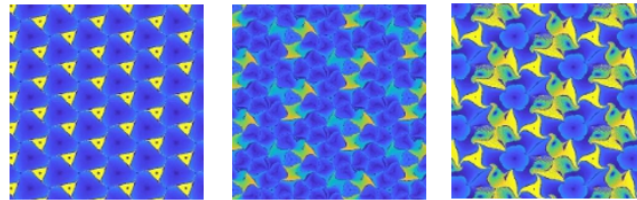
Gambar 4. Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ dengan fungsi f dan g masing-masing pada persamaan (3.18), (3.19), dan (3.20) menggunakan Tes Euclidean.



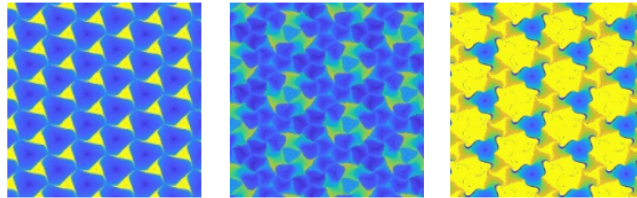
Gambar 5. Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ dengan fungsi f dan g masing-masing pada persamaan (3.18), (3.19), dan (3.20) menggunakan Tes Jarak Fraksional dengan $q = 0.5$.



Gambar 6. Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ dengan fungsi f dan g masing-masing pada persamaan (3.18), (3.19), dan (3.20) menggunakan Tes Jarak Fraksional dengan $q = 0.75$.



Gambar 7. Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ dengan fungsi f dan g masing-masing pada persamaan (3.18), (3.19), dan (3.20) menggunakan Tes Jarak Maksimum Berbobot dengan $a = 2$ dan $b = 2$.



Gambar 8. Hasil pembangkitan pola simetri $p3$ dengan fungsi f dan g masing-masing pada persamaan (3.18), (3.19), dan (3.20) menggunakan Tes Jarak Maksimum Berbobot dengan $a = 8$ dan $b = 8$.

4. Kesimpulan

Dalam makalah ini telah dibahas pembangkitan pola simetri $p3$ dari simulasi sistem dinamik. Syarat dan pemilihan fungsi dinamik didasarkan pada sifat-sifat yang berlaku yaitu simetri rotasi 120° dan simetri translasi di sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode tertentu. Pembangkitan pola simetri $p3$ dilakukan menggunakan aplikasi Matlab dengan *colourmap* tipe *jet*. Dari simulasi terhadap beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi dinamik, diperoleh pola-pola simetri $p3$ yang lebih variatif.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Muhafzan, Bapak Admi Nazra, dan Bapak Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran terhadap penyempurnaan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Durbin, J.R. 2009. *Modern Algebra: An Introduction Sixth Edition*. John Wiley and Sons, Austin.
- [2] Gdawiec, K. 2017. *Procedural Generation of Aesthetic Patterns from Dynamics and Iteration Processes*. *International Journal of Application Mathematics and Computers*. **27**(4): 827-837.
- [3] Schattschneider, D. 1978. *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*. *American Mathematical Monthly*. **85**(6): 430-450.
- [4] Chung, K.W. dan H.S.Y. Chan. 1993. *Symmetrical Patterns from Dynamics*. *Computer Graphics Forum*, Vol 12. No. 1, 33-40.
- [5] Gdawiec, K. 2017. *Procedural Generation of Aesthetic Patterns from Dynamics and Iteration processes*. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 27, No. 4, 827-837.
- [6] Jhonson, D. L. 2001. *Symmetries*. Springer Undergraduate Mathematics Series, London.
- [7] Putri, R.M. 2020. *Pembangkitan Pola Simetri Refleksi dan Rotasi 60° dari Simulasi Sistem Dinamik*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Padang : Universitas Andalas.
- [8] Viera, W.O. 2020. *Pembangkitan Pola Simetri $p2mm$ dari Simulasi Sistem Dinamik*. *Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. 19, No. 2, 241-251.
- [9] Cania, K.F. 2021. *Pembangkitan Pola Simetri Rotasi 90° dari Simulasi Sistem Dinamik*. *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 10, No. 1, 20-28.
- [10] Prabowo, R. 2022. *Pembangkitan Pola Simetri $p2$ dari Simulasi Sistem Dinamik*. *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 11, No. 4, 210-219.
- [11] Putra, A.R. 2022. *Pembangkitan Pola Simetri $p3m1$ dari Simulasi Sistem Dinamik*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Padang : Universitas Andalas.